Chapitre 5 : Mouvement dans un champ de force central conservatif

1. Force centrale conservative

1.1. Définition

Soit O un point fixe de l'espace. On dit d'un point matériel M qu'il est soumis à une force centrale $\vec{f}$ de centre O si et seulement si la droite d'action de cette force passe, à tout instant, par le point O c'est-à-dire qu'on peut écrire :

$$\vec{f} = f(r)\vec{u_r}$$

avec r distance au point O ($r = OM$). Pour une force centrale de centre O, ce point est alors appelé centre de force.

Remarques :
- une force centrale est donc une force radiale
- la force ne doit dépendre que de r afin d'assurer le caractère conservatif (démontré plus loin dans le cours)
- cette expression ne préjuge en rien du caractère attractif ($f(r) < 0$) ou répulsif ($f(r) > 0$) de la force.

Une force centrale étant une force conservative, dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$. On a ainsi :

$$f(r) = -\frac{dE_p}{dr}$$

Soit

$$\vec{f} = f(r)\vec{u_r} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u_r}$$

1.2. Exemples

Parmi les forces centrales, on trouve notamment :
- la force d'interaction gravitationnelle

$$\vec{f} = -\frac{\mathcal{G}mm'}{r^2}\vec{u_r} \text{ et } E_p = -\frac{\mathcal{G}mm'}{r} + E_{p_0}$$

- la force de Coulomb entre deux particules chargées

$$\vec{f} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r} \text{ et } E_p = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r} + E_{p_0}$$

- la force de rappel élastique

$$\vec{f} = -k(r - l_0)\vec{u_r} \text{ et } E_p = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 + E_{p_0}$$

on considère ici que le centre de force O est confondu avec l'extrémité fixe du ressort.

1.3. Un cas particulier de forces centrales : les forces newtoniennes

On dit d'une force centrale qu'elle est newtonienne si et seulement si elle peut être mise sous la forme :

$$\vec{f} = -\frac{K}{r^2}\vec{u_r}$$

et dérive d'une énergie potentielle d'expression

$$E_p(r) = -\frac{K}{r} + E_{p_0}$$

On remarque que, compte tenu de l'expression d'une force newtonienne, on aura :
- une force attractive si $K > 0$
- une force répulsive si $K < 0$

Les forces gravitationnelle et de Coulomb sont donc des forces newtoniennes. On a en effet :
- $K = \mathcal{G}mm'$ pour l'interaction gravitationnelle
- $K = -\dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}$ pour l'interaction coulombienne

La force de rappel d'un ressort n'est en revanche pas une force newtonienne.

1.4. Conséquences du caractère central de la force

Soit un point M de masse m animé d'un mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$, de quantité de mouvement $\overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ et soumis à une force centrale $\vec{f}$ de centre O.

✓ Si on applique le théorème du moment cinétique au point matériel, on obtient

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = r\overrightarrow{u_r} \wedge f(r)\overrightarrow{u_r} = \vec{0}$$

Le moment cinétique est donc une constante vectorielle. On dit qu'on a conservation du moment cinétique en O.

Pour simplifier, on supposera par la suite que le moment cinétique est dirigé suivant $\overrightarrow{u_z}$, soit :

$$\overrightarrow{L_O} = L_O\overrightarrow{u_z}$$

✓ A tout instant, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM}.\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right) = 0 = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u_z}$$

Le vecteur position est ainsi toujours orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u_z}$; le point matériel se déplace donc dans le plan $\mathcal{P} = (xOy)$.

Le mouvement du point matériel s'effectue dans le plan perpendiculaire à l'axe du moment cinétique.

La description du mouvement peut donc être effectuée à l'aide des coordonnées polaires, soit :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

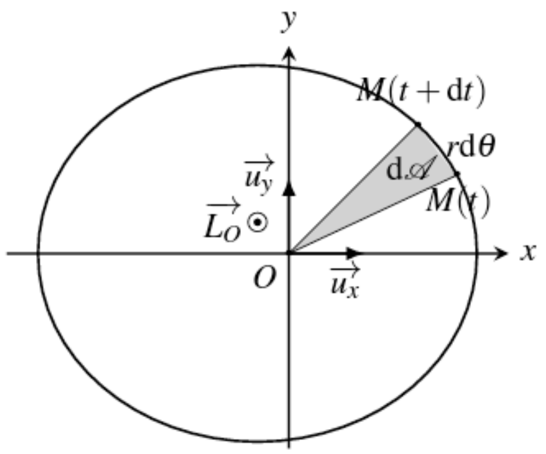
✓ En coordonnées polaires dans le plan $\mathscr{P}$, on a :

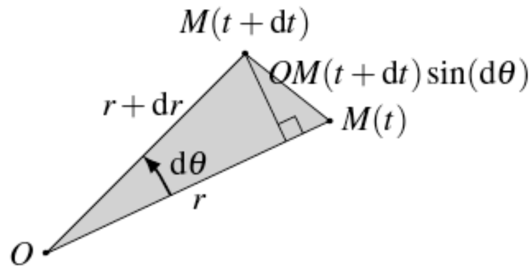
$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} m\dot{r} \\ mr\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

Le moment cinétique étant constant, on en déduit que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est une constante appelée constante des aires notée $\mathscr{C}$.

$$\mathscr{C} = r^2\dot{\theta}$$

On peut s'interroger sur le sens physique de cette constante. Considérons l'aire balayée $d\mathscr{A}$ par le vecteur position entre deux instants t et $t + dt$.





$d\mathscr{A}$ correspond à l'aire du triangle $OM(t)M(t+dt)$ soit :

$$\begin{aligned} d\mathscr{A} &= \frac{base \times hauteur}{2} \\ &= \frac{1}{2}OM(t) \times \left[OM(t+dt)\sin(d\theta)\right] \\ &= \frac{1}{2}r(r+dr)\sin(d\theta) \end{aligned}$$

Au premier ordre, on obtient :

$$d\mathscr{A} = \frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{\mathscr{C}}{2}dt$$

On définit la vitesse aréolaire par la relation :

$$\mathscr{V} = \frac{d\mathscr{A}}{dt}$$

Soit, dans le cas d'une force centrale :

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{C}}{2}$$

Le mouvement obéit à la loi des aires dont l'énoncé est le suivant : les aires balayées par le rayon vecteur (vecteur position) pendant des intervalles de temps égaux de durée Δt sont égales et valent :

$$\Delta\mathcal{A} = \frac{\mathcal{C}}{2}\Delta t$$

1.5. Conséquences du caractère conservatif de la force

On a vu précédemment que si une force centrale ne dépend que de r alors elle est conservative.

En effet, compte tenu des résultats obtenus pour une force centrale, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\vec{f} = f(r)\overrightarrow{u_r}$$

Ainsi, on a entre deux instants très proches t et $t+dt$:

$$\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \times dt = dr\overrightarrow{u_r} + r\,d\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

Soit un travail élémentaire

$$\delta W = \vec{f}.\overrightarrow{dOM} = f(r)dr$$

Entre deux instants t_1 et t_2, on a donc un travail de la force qui s'écrit :

$$W = \int_{r_1}^{r_2} f(r)dr = E_p(r_1) - E_p(r_2)$$

où $E_p(r)$ est la fonction énergie potentielle définie à une constante près par la relation :

$$-\frac{dE_p}{dr} = f(r)$$

La force est donc bien conservative puisque son travail ne dépend pas du chemin emprunté mais uniquement des positions initiale et finale. Elle dérive par ailleurs d'une énergie potentielle.

Un système soumis à une unique force centrale constitue donc un système conservatif dont l'énergie mécanique se conserve.

$$E_m = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + E_p(r)$$

A priori, on a un système à deux degrés de liberté pour lequel l'énergie mécanique dépend des coordonnées polaires (r,θ).

Toutefois, grâce à la constante des aires, on peut éliminer la variable angulaire.

On a alors :

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{m\mathscr{C}^2}{2r^2} + E_p(r)$$

On définit l'énergie potentielle effective par la relation :

$$E_{p_{eff}}(r) = \frac{m\mathscr{C}^2}{2r^2} + E_p(r)$$

ce qui permet d'écrire:

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + E_{p_{eff}}(r)$$

On est ainsi ramené à un système à un degré de liberté où un point de masse m se déplacerait sur un axe de coordonnée r et serait soumis à une énergie potentielle égale à $E_{p_{eff}}(r)$. On parle de mouvement radial.

L'étude énergétique du mouvement radial permet, connaissant l'énergie mécanique du système, d'établir l'état de ce dernier (état lié ou de diffusion) et la nature du mouvement.

2. Cas particulier du champ newtonien gravitationnel

2.1. Observations expérimentales : lois de Kepler

Les premières études ont porté sur le mouvement des planètes dans notre système solaire. L'analyse précise des trajectoires remonte au XVIIe siècle et est résumée par les trois lois de Kepler :

- Loi des orbites : les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est l'un des foyers.
- Loi des aires : les aires balayées par le rayon SP (S étant le centre du Soleil et P celui de la planète) pendant des intervalles de temps égaux sont égales.
- Loi des périodes : le carré de la période de révolution d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du demi-grand-axe a de sa trajectoire elliptique soit

$$\frac{T^2}{a^3} = Cte$$

Ces résultats obtenus à partir de mesures expérimentales, peuvent être retrouvés par la théorie vue dans ce chapitre. Nous verrons par ailleurs qu'ils peuvent être transposés au cas des satellites terrestres.

2.2. Description du problème

Soit un point M de masse m en interaction gravitationnelle avec un astre de masse M_A situé en un point fixe O (on suppose $m \ll M_A$). L'étude sera effectuée dans un référentiel galiléen défini à partir du point O et de trois axes pointant vers des étoiles lointaines qui apparaissent fixes :

- si l'astre considéré est le Soleil, alors ce référentiel est celui de Copernic
- s'il s'agit de l'étude d'un satellite en orbite autour de la Terre, il s'agit du référentiel géocentrique

Remarque : il ne faut pas confondre le référentiel géocentrique avec le référentiel terrestre utilisé jusqu'ici. Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de la Terre ; pas le référentiel terrestre. Par ailleurs, ce dernier a des axes liés à la Terre et qui tournent par conséquent en même temps qu'elle. Du point de vue du bilan des forces, on note que :

- dans le référentiel terrestre, on utilise le poids (somme de la force gravitationnelle et de la force d'inertie d'entraînement c.f Math.Spé)
- dans le référentiel géocentrique, on utilise la force gravitationnelle.

On a ainsi :

$$\vec{f} = -\frac{\mathcal{G}mM_A}{r^2}\vec{u_r} \text{ et } E_p = -\frac{\mathcal{G}mM_A}{r}$$

Pour simplifier, on prend $E_{p_0} = 0$.

2.3.Étude du mouvement radial - nature de la trajectoire

Le système considéré n'étant soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle constitue un système conservatif. On peut donc écrire :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p_{eff}}(r)$$

avec

$$E_{p_{eff}}(r) = \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} + E_p(r) = \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}mM_A}{r}$$

Il est nécessaire d'étudier la fonction $E_{p_{eff}}(r)$. On a :

- pour $r \to \infty$, le terme en $\frac{1}{r}$ prédomine ; la fonction est croissante et tend vers 0
- pour $r \to 0$, le terme en $\frac{1}{r^2}$ prédomine ; la fonction tend vers $+\infty$
- la fonction $E_{p_{eff}}(r)$ passe donc par un minimum négatif $E_{\min}$ pour $r = r_0$ tel que

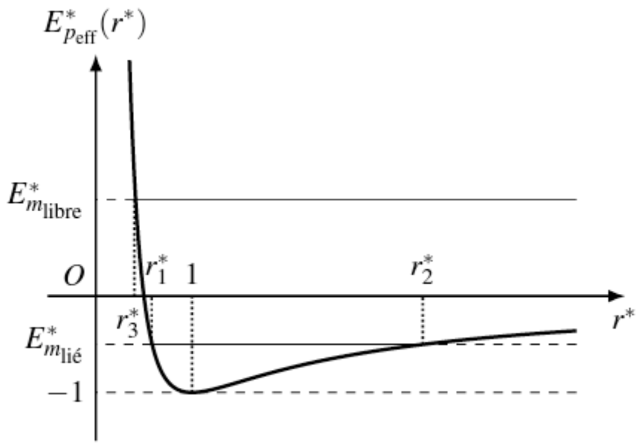
$$\frac{dE_{p_{eff}}}{dr} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{m\mathcal{C}^2}{r^3} + \frac{\mathcal{G}mM_A}{r^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_0 = \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{G}M_A}$$

soit une énergie potentielle minimale d'expression

$$E_{\min} = -\frac{m}{2}\frac{\mathcal{G}^2M_A^2}{\mathcal{C}^2} = -\frac{\mathcal{G}mM_A}{2r_0} = -E_0$$

On peut ainsi représenter la courbe avec des coordonnées normalisées :

$$E^*_{p_{eff}} = \frac{E_{p_{eff}}}{E_0} \text{ et } r^* = \frac{r}{r_0}$$



On a alors :

- si $E_m < E_{\min}$, il n'y a pas de mouvement possible
- si $E_m = E_{\min}$ alors $r = r_0$ à tout instant. Par ailleurs, on a par la loi des aires :

$$\dot{\theta} = \frac{\mathcal{C}}{r_0^2} = Cte$$

  On a donc un mouvement circulaire uniforme.
- si $E_{\min} < E_m < 0$, on a un état lié avec $r_1 \leq r \leq r_2$; la trajectoire du système autour de l'astre est elliptique.
- si $E_m \geq 0$, on a un état libre ; on aura une trajectoire parabolique ($E_m = 0$) ou hyperbolique ($E_m > 0$)

2.4. Cas particulier du mouvement circulaire

Par définition, on a à tout instant :

$$r = r_0 = Cte$$

Soit :

$$\overrightarrow{OM} = r_0 \overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = r_0 \dot{\theta} \overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = -r_0 \dot{\theta}^2 \overrightarrow{u_r} + r_0 \ddot{\theta} \overrightarrow{u_\theta}$$

L'application de la seconde loi de Newton au point M fournit l'équation vectorielle :

$$m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = -mr_0 \dot{\theta}^2 \overrightarrow{u_r} + mr_0 \ddot{\theta} \overrightarrow{u_\theta} = -\frac{\mathcal{G} m M_A}{r_0^2} \overrightarrow{u_r}$$

Par projection suivant les vecteurs de la base polaire, on obtient :

$$\begin{cases} -mr_0 \dot{\theta}^2 = -\dfrac{\mathcal{G} m M_A}{r_0^2} \\ mr_0 \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = r_0 \dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G} M_A}{r_0}} = v_0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On retrouve le caractère uniforme du mouvement de M autour de l'astre, la trajectoire circulaire de rayon r_0 étant parcourue à la vitesse

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_A}{r_0}}$$

On peut alors exprimer les différentes grandeurs énergétiques :

- l'énergie potentielle : $E_p = -\frac{\mathcal{G}mM_A}{r_0}$
- l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\mathcal{G}mM_A}{2r_0}$
- l'énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p = -\frac{\mathcal{G}mM_A}{2r_0} = E_{\min}$

On peut également retrouver la troisième loi de Kepler (les deux premières étant démontrées à l'aide de la conservation du moment cinétique). La période de révolution a pour expression

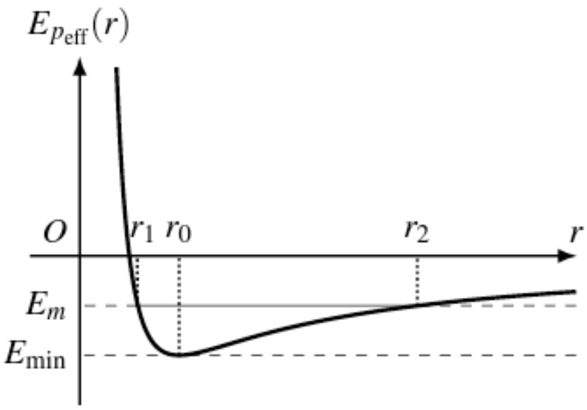
$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_A}$$

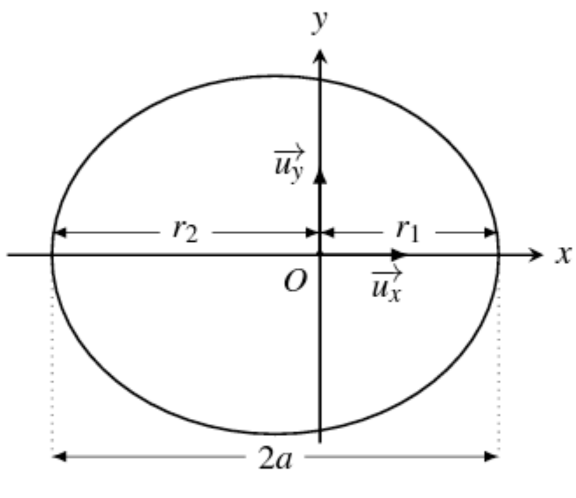
2.5. Cas d'un mouvement elliptique

Dans le cas d'une trajectoire elliptique, la distance à l'astre r varie entre deux valeurs limites :

- la valeur minimale, notée $r_P = r_1$, est atteinte pour un point P appelé périgée pour un satellite en orbite autour de la Terre ou périhélie dans le cas d'une planète autour du Soleil
- la valeur maximale, notée $r_A = r_2$, est atteinte pour un point A appelé apogée pour un satellite en orbite autour de la Terre ou aphélie dans le cas d'une planète autour du Soleil

Ces deux points particuliers correspondent aux extrémités du grand axe de l'ellipse.





De ce fait, on a la relation :

$$r_1 + r_2 = 2a$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse.

Nous admettrons que, pour une trajectoire elliptique, les expressions obtenues pour une trajectoire circulaire se généralisent en remplaçant le rayon r par a.

On a ainsi :

$$E_m = E_c + E_p = -\frac{\mathcal{G} m M_A}{2a}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_A}$$

De même, lorsque $r = r_A$ (respectivement $r = r_P$), l'énergie potentielle est maximale (respectivement minimale) donc l'énergie cinétique et par conséquent la vitesse sont minimales (respectivement maximale).

Contrairement au cas d'une trajectoire circulaire, le mouvement n'est donc pas uniforme.

3. Application au cas des satellites terrestres

3.1.Satellite géostationnaire

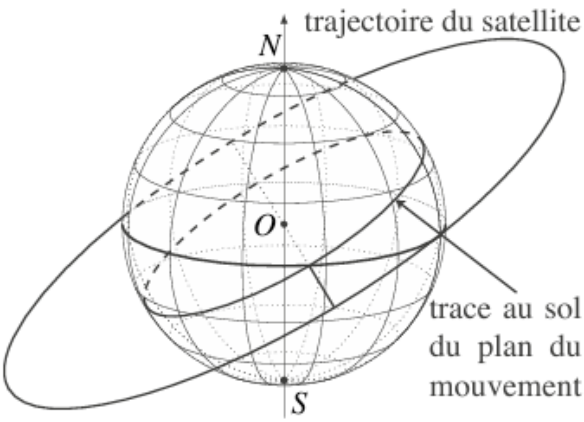
Un satellite est dit géostationnaire s'il reste toujours à la verticale d'un même point de la Terre. Pour un observateur placé en ce lieu (référentiel terrestre), le satellite parait alors immobile.

Nous allons montré que l'orbite d'un satellite géostationnaire a les caractéristiques suivantes :

- le plan de l'orbite doit être dans le plan de l'équateur
- la période de révolution du satellite doit être égale à la période de rotation de la Terre
- l'orbite doit être circulaire

3.2.Caractéristiques de l'orbite d'un satellite géostationnaire

Les résultats des paragraphes précédents permettent d'affirmer que l'orbite d'un satellite en interaction gravitationnelle avec la Terre est un plan contenant le centre de la Terre. Si le plan de l'orbite est incliné par rapport au plan équatorial alors le satellite se trouve tantôt au-dessus de l'hémisphère nord, tantôt au-dessus de l'hémisphère sud.b

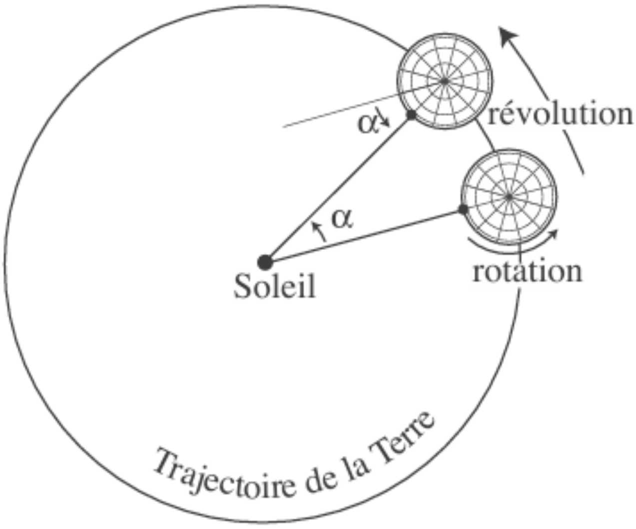


Le plan de l'orbite doit donc nécessairement être confondu avec le plan équatorial.

3.3. Période de révolution d'un satellite géostationnaire

Le satellite devant rester à la verticale d'un point P de l'équateur, la vitesse angulaire du satellite doit être la même que celle de P. Il s'ensuit que la période de révolution du satellite autour de la Terre doit être égale au jour sidéral $T_{sidéral}$, c'est-à-dire au temps nécessaire à la Terre pour qu'elle effectue un tour sur elle-même.

Le jour sidéral n'est pas égal à $T = 24\ h$. En effet, en une journée, la Terre effectue un peu plus d'un tour sur elle-même.



Elle tourne en effet d'un angle $2\pi + \alpha$ où α est l'angle dont elle s'est déplacée dans son orbite autour du Soleil. La période de révolution de la Terre autour du Soleil étant de $365{,}25$ jours, on obtient :

$$\alpha = \frac{2\pi}{365{,}25}$$

En notant Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même, Il vient que :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_{sidéral}} = \frac{2\pi + \alpha}{T}$$

Soit

$$T_{sidéral} = T \times \frac{2\pi}{2\pi + \alpha} \simeq 23h\ 56 \min 4s = 86164\ s$$

3.4. Rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire

Enfin, la vitesse angulaire Ω étant constante (rotation uniforme), la loi des aires implique que le rayon doit l'être également. On a donc une orbite circulaire.

Par la troisième loi de Kepler, on obtient ainsi :

$$\frac{T_{sidéral}^2}{r_{géo}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_{Terre}}$$

On trouve ainsi

$$r_{géo} \simeq 42164\ km$$

soit, en prenant $R_T = 6378\ km$, une altitude

$$h = r_{géo} - R_T = 35786\ km$$

Tous les satellites géostationnaires se trouveront à la même altitude ($\approx 36000\ km$).

3.5. Vitesses cosmiques

- ✓ première vitesse cosmique :
  Soit un satellite terrestre (pas forcément géostationnaire) en orbite autour de la Terre. L'état lié se traduit par la relation énergétique :

$$E_{\min} \leq E_m < 0$$

avec

$$E_{\min} = -\frac{\mathcal{G}mM_A}{2r_0}$$

où r_0 serait le rayon de l'orbite circulaire pour l'énergie E_m communiquée au satellite.
On remarque que la valeur de $E_{\min}$ sera d'autant plus faible que le rayon de l'orbite sera faible.

On définit la première vitesse cosmique comme la vitesse minimale à communiquer à un satellite pour le placer en orbite autour de la Terre.

D'après ce qui précède, ceci correspond à une orbite circulaire de rayon R_T, soit

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} \sim 30000\ km.h^{-1}$$

- ✓ deuxième vitesse cosmique ou vitesse de libération :

On définit la deuxième vitesse cosmique comme la vitesse minimale à communiquer au satellite afin de lui permettre de quitter l'attraction gravitationnelle de la Terre depuis le sol (donc un état libre).

Ceci est réalisé pour

$$E_m \geq 0$$

Pour effectuer le calcul, on suppose qu'à l'infini, la vitesse du satellite sera nulle ce qui revient à choisir la condition $E_m = 0$. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit alors

$$E_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{\mathcal{G}mM_T}{r_\infty} = 0$$

On obtient ainsi :

$$v_2 = \sqrt{2\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2} \times v_1 \sim 40000\ km.h^{-1}$$